2. $x \in [0,1]$

f est dérivable sur [0,1]

$|f'(t)| \le \frac{1}{2}\ ;\ \forall\, t \in [0,1]$

D'après le théorème des inégalités des accroissements finis

$|f(x)-f(0)| \le \frac{1}{2}|x-0|$

$|f(x)-1| \le \frac{1}{2}x$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}x \le f(x)-1 \le \frac{1}{2}x$

$\Rightarrow 1-\frac{1}{2}x \le f(x) \le 1+\frac{1}{2}x$

$d'où\ 1-\frac{1}{2}x \le f(x)\ \ (1)$

$x \ge 0 \Rightarrow 1+x \ge 1$

$\Rightarrow \sqrt{1+x} \ge 1$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}} \le 1$

$\Rightarrow f(x) \le 1 \quad (2)$

$(1)+(2) \Rightarrow$

$1-\frac{1}{2}x \le f(x) \le 1\ pour\ x \in [O,1]$

3.

$\alpha = 0,0000000002 = 2.10^{-10}$

$1-\frac{1}{2}\alpha \le f(\alpha) \le 1$

$1-10^{-10} \le f(\alpha) \le 1$

$0,999999999 \le f(\alpha) \le 1$

**Ex 11** :

Soit f(t)= cos(t) f est dérivable sur IR

f'(t) = -sin(t) $\Rightarrow |f'(t)| \le 1\ \forall t \in IR$

Alors d'après th.In.Ac .finis

Pour tous réels x et y on a :

$|f(x)-f(y)| \le 1.|x-y| \Rightarrow |\cos x - \cos y| \le |x-y|$

**EX 12** :

1. Soit f(t)=sin (t) f est dérivable sur IR et f'(t)= cos (t)

$\forall t \in \left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right] On\ a\ \frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos(t) = f'(t) \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

Alors d'après th.Inég.Acc.finis :

$\frac{\sqrt{2}}{2}.(y-x) \le f(y)-f(x) \le \frac{\sqrt{3}}{2}.(y-x)$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}.(y-x) \le \sin(y)-\sin(x) \le \frac{\sqrt{3}}{2}.(y-x)$

2. pour $x = \frac{\pi}{6}$ et $y = \frac{\pi}{4}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}.(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}) \le \sin(\frac{\pi}{4})-\sin(\frac{\pi}{6}) \le \frac{\sqrt{3}}{2}.(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}.\pi}{24} \le \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2} \le \frac{\sqrt{3}.\pi}{24}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{12} \le \frac{\sqrt{2}-1}{\pi} \le \frac{\sqrt{3}}{12}$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn